Symetria w fizyce
Rozdział 2

2. Przekształcenia symetrii w dwóch wymiarach

2.1 Symetrie figur płaskich

W dalszym ciągu interesować nas będą takie izometrie, które przekształcają figurę geometryczną w siebie. Izometrię tego rodzaju będziemy **nazywać przekształceniem symetrii**, lub krócej **symetrią** figury geometrycznej – w dwóch wymiarach. Tej samej nazwy będziemy używać dla izometrii przekształcających bryłę w siebie – w trzech wymiarach.

Nazewnictwo

Używane nazewnictwo nie jest jednoznaczne:
- Zgodnie z przyjęta wyżej definicją symetrią nazywamy izometrię, przekształcającą figurę lub bryłę w siebie. Na przykład kwadrat ma symetrię odbicia względnej przekątnej (patrz dalej, rys.2.#).
- Symetrią figury lub bryły nazywa się także zbiór wszystkich izometrii, przekształcających figurę lub bryłę w siebie. W przypadku kwadratu jest to zbiór ośmiu izometrii (także rys.2.#).

Zwykle z kontekstu bez trudu można zorientować się, o które z tych znaczeń chodzi.

Symetrie figur skończonych

Figury o skończonych rozmiarach mają symetrie, omówione w paragrafie poprzednim, to znaczy **odbicia** i **obroty** (w tym **inwersję**).
Do ich symetrii nie mogą natomiast należeć przesunięcia. Symetrię przesunięcia mogą mieć tylko fikcyjne twory nieskończone, jak prosta czy wyidealizowana nieskończona sieć krystaliczna.

Obroty

Mogą istnieć dwa przypadki:

1. Figura ma symetrię obrotu o $\frac{1}{n}$ **kąta pełnego**, czyli o $\frac{360^\circ}{n}$, a w mierze łukowej – o $\frac{2\pi}{n}$, oraz o wielokrotności tego kąta. Symetrie takie mają na przykład rozety, widoczne na frontonie katedry na ostatniej stronie okładki, a także wielokąty foremne (patrz dalej).

   Mówiliśmy już w rozdziale poprzednim, że obrót o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego będziemy oznaczać symbolem[1] $\boldsymbol{C}_n$. Wielokrotności takiego obrotu: symbolami $\boldsymbol{C}_n^2$, $\boldsymbol{C}_n^3$, itp., zgodnie z konwencją omówiona w rozdziale poprzednim (wzory 1.# i 1.#).

   Dla n-kąta foremnego istnieje skończona liczba nietrywialnie różnych operacji tego rodzaju, bo n-krotnie powtórzony obrót o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego daje kąt pełny, czyli transformację tożsamościową $\boldsymbol{e}$.
2. Koło i okrąg mają symetrie obrotu o kąty dowolne, symetrii takich jest nieskończenie wiele.

Symetria odbiciowa

Figura może także mieć symetrię odbiciową – tak jak trójkąt równoramienny z rysunku 1.#. Symetrie takie będziemy oznaczać symbolem $\boldsymbol{\sigma}$ (oznaczenie to wprowadziliśmy w rozdziale poprzednim).

2.2 Symetria kwadratu

Omawianie symetrii figur skończonych zacznijmy od kwadratu (rys.2.#). Na rysunku 2.# kwadrat został podzielony na 8 „cząstek". Na pierwszym z ośmiu rysunków jedna z cząstek została wybrana i zaznaczona innym kolorem. Kolejne operacje symetrii przeprowadzają cały kwadrat w siebie, ale pod ich wpływem wybrana cząstka zmienia położenie.

Rys. 2.1. Symetrie kwadratu

1. Trzy rysunki w pierwszym wierszu przedstawiają kolejno obroty:
   - o 90°, czyli $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Zgodnie z umową oznaczamy ten obrót symbolem $\boldsymbol{C}_4$.
   - o 180°, czyli $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Zgodnie z umową oznaczamy go symbolem $\boldsymbol{C}_2$.
   - o 270°, czyli $3 \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$. Jest on równoważny obrotowi o kąt $-90°$, czyli $-\frac{\pi}{2}$. Zgodnie z konwencją z paragrafu 1.# oznaczyliśmy ten obrót symbolem $\boldsymbol{C}_4^3$.
2. Następne cztery rysunki ilustrują odbicia zwierciadlane:
   - względem linii poziomej, łączącej środki przeciwległych boków. Oznaczone ono zostało symbolem $\boldsymbol{\sigma}_1$.
   - względem jednej z przekątnych, oznaczone symbolem $\boldsymbol{\sigma}_2$.
   - względem linii pionowej ($\boldsymbol{\sigma}_3$).
   - względem drugiej z przekątnych ($\boldsymbol{\sigma}_4$).

Cząstka wyjściowa i siedem nowych, uzyskanych za pomocą omówionych przekształceń symetrii, wypełniają cały kwadrat.

[1] W książce tej będziemy posługiwać się oznaczeniami

Inwersja w dwóch wymiarach

Wspomnieliśmy już w paragrafie 1.#, że obrót o kąt równy 180° w dwóch wymiarach nazywa się także inwersją ***i*** (lub symetrią środkową). Powiedzieliśmy już, że kwadrat taką symetrię posiada (rys.2.#c).
Równoległobok dowolny ma oprócz tożsamości tylko symetrię inwersji (patrz dalej).

Symetria tożsamościowa

W rozdziale poprzednim wprowadziliśmy formalnie jeszcze jeden typ symetrii: **tożsamość**. Oznacza ona przekształcenie, nie zmieniające nic w układzie. Tożsamość oznaczać będziemy symbolem ***e***. Tak został podpisany pierwszy z ośmiu rysunków na ilustracji 1.#.

Symetrie odbiciowe wielokątów o parzystej liczbie boków

Zauważamy, że kwadrat ma dwa istotnie różne rodzaje odbić zwierciadlanych, względem prostych przechodzących:
a. przez środki przeciwległych boków (σ_1 i σ_3);
b. przez przeciwległe wierzchołki (σ_2 i σ_4).
Taką właściwość mają też inne wielokąty foremne o **parzystej** liczbie boków. Rysunek 2.# przedstawia linie odbić zwierciadlanych sześciokąta. Linie symetrii typu a zostały zaznaczone kolorem czerwonym, a typu b – kolorem niebieskim.

Rys. 2.2. Linie odbić zwierciadlanych sześciokąta foremnego.

Zbiór przekształceń

Podsumujmy: kwadrat ma 8 przekształceń symetrii:

(2.1) $$\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{C}_4,\ \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}_4^2,\ \boldsymbol{C}_4^3,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4.$$

Zbiór wszystkich operacji symetrii określonego obiektu nazywamy **grupą symetrii** lub **grupą przekształceń**. Taka grupę stanowią na przykład wypisane przekształcenia symetrii kwadratu. Grupa symetrii kwadratu ma 8 elementów.
Dokładniejsza definicja pojęcia grupy podana jest dalej, w paragrafie 2.#.

2.3 Składanie operacji symetrii

Złożenie przekształceń

Każde z omawianych przez wyżej nas przekształceń symetrii przeprowadzało rozważaną figurę geometryczną w siebie. Można jednak pomyśleć, że dokonamy po kolei dwóch przekształceń: najpierw przekształcenia ***a***, a potem przekształcenia ***b***. Na skutek obu tych operacji figura także przejdzie w siebie. A zatem **złożenie** dwóch przekształceń symetrii daje w wyniku także pewne przekształcenie symetrii ***c***. Zapisujemy to:

(2.2) $$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ba}\ .$$

Oznaczenie jest identyczne, jak dla składania izometrii, omówionego w paragrafie 1.#.

Złożenie obrotów

Złożenie obrotu względem punktu o kąt α i obrotu o kąt β jest także obrotem: o kąt $\alpha + \beta$. Mówiliśmy już o tym w paragrafie 1.#. Na przykład dwukrotne obrócenie kwadratu o 90° daje obrót o 180° (rys.1.#):

(2.3) $$C_4C_4 = C_4^2 = C_2 .$$

Podobnie trzykrotne złożenie obrotów o 90° daje obrót o 270°:

(2.4) $$C_4C_4C_4 = C_4^3 ;\ \text{itp.}$$

Czterokrotne złożenie takich obrotów, czyli C_4^4, oznacza obrót o 360°, co jest równoważne tozsamości. Zatem:

(2.5) $$C_4^4 = e.$$

Złożenie dwóch identycznych odbić

Złożenie dwóch odbić względem tej samej linii daje przekształcenie tożsamościowe (mówiliśmy o tym w paragrafie 1.#). Na przykład (rys.1.#)

(2.6) $$\sigma_1\sigma_1 = e.$$

Rys. 2.3. Dwukrotne odbicie zwierciadlane jest przekształceniem tożsamościowym

Złożenie dwóch różnych odbić

Złożenie dwóch odbić względem dwóch linii, tworzących ze sobą kąt α, jest obrotem o kąt 2α. Na przykład przekształcenie, które jest złożeniem kolejno odbić σ_1 i σ_2 z rysunku 1.# ($\alpha = 45°$) jest obrotem o kąt 90° (rys.1.#):

(2.7) $$\sigma_2\sigma_1 = C_4 .$$

Pamiętamy: przekształcenia piszemy w „odwrotnej" kolejności!
Podobnie możemy napisać:

(2.8) $$\sigma_1\sigma_2 = C_4^3 .$$

Złożenie przekształceń symetrii nie zawsze jest przemienne

Operacja złożenia przekształceń symetrii na ogół nie jest przemienna, o czym mówiliśmy już w paragrafie 1.#. Może więc zachodzić:

(2.9) $$ba \neq ab .$$

Na przykład $\sigma_2\sigma_1 = C_4 \neq \sigma_1\sigma_2 = C_4^3$ (wzory 2.# i 2.#).

2.4 Tablica grupowa

Przy omawianiu właściwości symetrii figur geometrycznych sporządza się tabele, które przedstawiają złożenia poszczególnych operacji symetrii rozważanego obiektu – czyli poszczególnych elementów grupy symetrii. Nazywamy je **tabelami grupowymi** Oczywiście postępuje się tak wtedy, kiedy liczba przekształceń symetrii jest niezbyt wielka liczbą naturalną.

Przykład

Tabela 2.# przedstawia złożenia elementów symetrii kwadratu $c = ba$. Pierwszy wiersz przedstawia element a, który działa jako pierwszy. Pierwsza kolumna przedstawia element b, który działa jako drugi.
Składanie interesujących nas elementów grupy symetrii omówiliśmy już w zasadzie w paragrafie poprzednim. Stwierdziliśmy wtedy na przykład, że:

(2.10) $$C_4C_4 = C_4^2 = C_2 .$$

(2.11) $$C_4C_4C_4 = (C_4C_4)C_4 = C_2C_4 = C_4^3 ;$$

(2.12) $$\sigma_1\sigma_1 = e;$$

(2.13) $$\sigma_2\sigma_1 = C_4 ;$$

(2.14) $$\sigma_1\sigma_2 = C_4^3 .$$

Pozostałe rubryki wypełnimy w podobny sposób.

Tabela 2.#. Tabela złożeń operacji symetrii kwadratu (tablica grupowa)

	e	C_4	C_2	C_4^3	σ_1	σ_3	σ_2	σ_4
e	e	C_4	C_2	C_4^3	σ_1	σ_3	σ_2	σ_4
C_4	C_4	C_2	C_4^3	e	σ_2	σ_4	σ_3	σ_1
C_2	C_2	C_4^3	e	C_4	σ_3	σ_1	σ_4	σ_2
C_4^3	C_4^3	e	C_4	C_2	σ_4	σ_2	σ_1	σ_3
σ_1	σ_1	σ_4	σ_3	σ_2	e	C_2	C_4^3	C_4
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_4	C_2	e	C_4	C_4^3
σ_2	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3	C_4	C_4^3	e	C_2
σ_4	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	C_4^3	C_4	C_2	e

Program komputerowy

2.5 Grupa przekształceń

Zbiór wszystkich operacji symetrii określonego obiektu nazywamy **grupą symetrii** lub **grupą przekształceń**. Taka grupę stanowią na przykład omówione wyżej przekształcenia symetrii kwadratu. Wiemy już, że grupa symetrii kwadratu ma 8 elementów.
W matematyce pojęcie grupy jest precyzyjnie określone.

Definicja grupy

W matematyce **grupą** G nazywamy:
– zbiór elementów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... ;
– dla którego określona jest operacja **złożenia** (którą oznaczymy na chwilę symbolem •),
i który ma następujące własności:
1. Jeżeli $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są elementami zbioru G, to i ich złożenie $\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a}$ jest elementem zbioru G.
2. Operacja złożenia jest **łączna**: $\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}\bullet(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a})$.
3. Zbiór G zawiera **element jednostkowy** $\boldsymbol{e}$, taki że $\boldsymbol{e}\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}$.
4. Jeżeli $\boldsymbol{a}$ należy do zbioru G, to w zbiorze jest i element $\boldsymbol{b}$ o własności: $\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}$. Element $\boldsymbol{b}$ nazywamy **elementem odwrotnym** do elementu $\boldsymbol{a}$ i zapisujemy go $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{-1}$.

Nie wymaga się, aby operacja złożenia była **przemienna**.

Definicja grupy symetrii

Zbiór elementów symetrii figury – takiej jak kwadrat – stanowi grupę. Nazywamy ją **grupą symetrii**.
1. Postulat 1 wynika z ogólnej własności izometrii: złożenie izometrii jest izometrią (§#).
2. Złożenie izometrii jest łączne (§1#).

3. Elementem jednostkowym jest przekształcenie tożsamościowe (§1#).
4. Do każdej izometrii można dobrać izometrię odwrotną.
   W szczególności:
   a. operacją odwrotną do obrotu o kąt α względem pewnej osi jest obrót o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi (§1#);
   b. operacją odwrotną do odbicia względem określonej płaszczyzny jest odbicie względem tej samej płaszczyzny. Innymi słowy: odbicie jest swoja własną operacją odwrotną.
   c. operacją odwrotną do inwersji jest ta sama inwersja.

Składanie izometrii na ogół nie jest przemienne (§1.# i 2.#).

Podgrupy

Podzbiór H elementów grupy G, który stanowi grupę, nazywamy **podgrupą** grupy G.

2.6 Psujemy kwadrat

Rozważmy teraz jakie symetrie mają niektóre figury, które można uzyskać przez kolejne „psucie” kwadratu.

Prostokąt

Jeżeli kwadrat rozciągniemy w poziomie, uzyskamy prostokąt. Figura ta ma mniej elementów symetrii, niż kwadrat. Jest ich cztery (rys.2.#):

1. tożsamość $\boldsymbol{e}$,
2. obrót dwukrotny $\boldsymbol{C}_2$,
3. odbicie zwierciadlane względem osi poziomej $\boldsymbol{\sigma}_1$;
4. odbicie zwierciadlane względem osi pionowej $\boldsymbol{\sigma}_3$ (zostawiliśmy oznaczenie przyjęte dla kwadratu).

Rys. 2.4. Przekształcenia symetrii prostokąta

Tabela 2.# przedstawia złożenia tych operacji symetrii.

Tabela 2.#. Tabela złożeń operacji symetrii prostokąta

	e	C_2	σ_1	σ_3
e	e	C_2	σ_1	σ_3
C_2	C_2	e	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_3	e	C_2
σ_3	σ_3	σ_1	C_2	e

Przekształcenia symetrii prostokąta są **przemienne**. Objawia się to w ten sposób, że tablica grupowa tej figury jest symetryczna względem przekątnej.

Grupa symetrii prostokąta

Zauważmy, że:

1. Zbiór elementów symetrii prostokąta ($\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_3$), jest podzbiorem zbioru symetrii kwadratu ($\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}_4^2$, $\boldsymbol{C}_4^3$, $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$, $\boldsymbol{\sigma}_4$).
2. Ponieważ zbiór ten stanowi grupę, jest podgrupą grupy symetrii kwadratu.
3. Liczba elementów grupy prostokąta jest dzielnikiem liczby elementów grupy kwadratu, bo 4 = 8:2.

4. Grupa operacji symetrii prostokąta jest grupą **przemienną**[2].

Romb

Jeżeli prostokąt rozciągniemy wzdłuż przekątnej – bez zmiany długości boków – uzyskamy romb. Figura ta ma oprócz tożsamości ma jeszcze obrót dwukrotny i dwa różne odbicia zwierciadlane względem prostopadłych linii, przechodzących przez przeciwległe wierzchołki (rys.2.#). Zatem symetria rombu jest taka sama, jak prostokąta.

Rys. 2.5. Przekształcenia symetrii rombu

Grupa symetrii rombu

Zauważmy, że:
1. Zbiór elementów symetrii rombu jest podzbiorem zbioru symetrii kwadratu. Ponieważ stanowi grupę, jest podgrupą grupy symetrii kwadratu. Podobnie było i dla prostokąta.
2. Liczba elementów grupy prostokąta jest dzielnikiem liczby elementów grupy kwadratu, bo 4 = 8:2.

Równoległobok

Deformując prostokąt lub romb możemy uzyskać równoległobok „dowolny". Ma on naprzeciwległe boki i naprzeciwległe kąty równe. Figura ta ma oprócz tożsamości tylko jedną operację symetrii: obrót dwukrotny C_2. Jej tabela grupowa jest bardzo prosta (tabela 2.#).

Rys. 2.6. Równoległobok ma tylko obrót dwukrotny (inwersję)

Rys. 2.7. Ornament o symetrii środkowej

Tabela 2.#. Tabela operacji symetrii równoległoboku.

	e	C_2
e	e	C_2
C_2	C_2	e

Grupa symetrii równoległoboku

Zauważmy, że:
1. Zbiór dwóch elementów symetrii rombu jest podzbiorem zbioru symetrii kwadratu, a także podzbiorem zbiorów symetrii prostokąta i rombu. Ponieważ stanowi grupę, jest podgrupą grupy symetrii kwadratu. Podobnie było i dla prostokąta.
2. Liczba elementów grupy prostokąta jest dzielnikiem liczby elementów grupy kwadratu, bo 2 = 8:4. Jest także dzielnikiem liczby elementów grupy prostokąta, bo 2 = 4:2.

Figura bez symetrii odbiciowych

Rozważmy jeszcze możliwość „popsucia" kwadratu w sposób przedstawiony na rysunku 2.#. Jeżeli powyginamy tak krawędzie kwadratu:
- straci on wszystkie symetrie odbiciowe, ale
- zachowa symetrie obrotowe.

Nasza figura ma więc 4 operacje symetrii: e, C_4, $C_2 = C_2^2$, C_4^3. Wszystkie te operacje są **przemienne**, bo na przykład:

---

[2] Grupę przemienną nazywa się także grupą **abelową**. Nazwa nie pochodzi od brata Kaina, ale od nazwiska matematyka norweskiego, Nielsa Henrika Abela (1802-1829).

(2.15) $$C_2C_4 = (C_4C_4)C_4 = C_4(C_4C_4) = C_4C_2 .$$

Tabela operacji symetrii naszej figury ma postać:

Tabela 2.#. Tabela operacji symetrii figury z rysunku 2.#

	e	C_4	C_2	C_4^3
e	e	C_4	C_2	C_4^3
C_4	C_4	C_2	C_4^3	e
C_2	C_2	C_4^3	e	C_4
C_4^3	C_4^3	e	C_4	C_2

Do figur o podobnych właściwościach symetrii powrócimy jeszcze w paragrafie 2.#.

Grupa symetrii „powyginanego kwadratu"

Zauważmy, że:

1. Zbiór elementów rozważanej figury jest podzbiorem zbioru symetrii kwadratu. Ponieważ stanowi grupę, jest także podgrupą grupy symetrii kwadratu.
2. Grupa te jest grupę przemienną.
3. Liczba elementów grupy tej figury jest dzielnikiem liczby elementów grupy kwadratu, bo 4 = 8:2.

2.7 Symetria trójkąta równobocznego

Jako następny przykład rozpatrzmy przekształcenia symetrii trójkąta równobocznego. Rysunek 2.# został wykonany w tej samej konwencji, jak rysunek 2.#.

Rys. 2.8. Przekształcenia symetrii trójkąta równobocznego.

1. Pierwszy rysunek przedstawia trójkąt w położeniu „wyjściowym".
2. Dwa następne rysunki ilustrują obroty:
   - o 120°, czyli $\frac{2\pi}{3}$, oznaczony symbolem C_3.
   - o 240°, czyli $2\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$, oznaczony symbolem C_3^2.
3. Trzy rysunki w drugim wierszu przedstawiają odbicia zwierciadlane względem prostych, łączących wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Oznaczone zostały one symbolami σ_1, σ_2 i σ_3.

Tabela 2.# przedstawia tabelę grupową trójkąta równobocznego

Tabela 2.#. Tabela symetrii trójkąta równobocznego

	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	e	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	C_3^2	e	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	C_3	C_3^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	e	C_3

σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	e

Symetrie odbiciowe wielokątów o nieparzystej liczbie boków

Zauważmy, że trójkąt równoboczny ma tylko jeden rodzaj odbić zwierciadlanych. Każda z przedstawionych na rysunku 2.# linii symetrii łączy wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Sytuacja jest więc odmienna, niż w przypadku kwadratu.
Podobną własność mają i inne wielokąty foremne o **nieparzystej** liczbie boków. Rysunek 2.# przedstawia linie symetrii zwierciadlanej pięciokąta foremnego.

Rys. 2.9. Linie symetrii zwierciadlanej pięciokąta foremnego

Dygresja. Trójkąt równoramienny

Trójkąt równoramienny ma – oprócz tożsamości – tylko jedno przekształcenie symetrii: odbicie zwierciadlane względem dwusiecznej kąta wierzchołkowego (rys.2.#). Identyczną symetrię mają typowe wycinanki kurpiowskie.

Rys. 2.10. Trójkąt równoramienny

2.8 Figury o symetrii obrotowej bez odbić

Niemal wszystkie omówione wyżej figury geometryczne miały symetrie odbiciowe. Wyjątek stanowiła figura z rysunku 2.#, która miała wyłącznie symetrie obrotowe. Dalsze przykłady figur tego typu omówimy w tym paragrafie.

Figura o trzykrotnej symetrii obrotowej

Wielokąt przedstawiony na rysunku 2.# ma trzykrotną symetrię obrotową. Oprócz tożsamości ma obroty: o 120°, czyli $\frac{2\pi}{3}$ (C_3) i o 240°, czyli $2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ (C_3^2).

Rys. 2.11. Figura o trzykrotnej symetrii obrotowej

Tabela 2.#. Tabela grupowa układu o trzykrotnej symetrii obrotowej

	e	C_3	C_3^2
e	e	C_3	C_3^2
C_3	C_3	C_3^2	e
C_3^2	C_3^2	e	C_3

Operacje symetrii rozważanej figury są przemienne. Tablica grupowa (tabela 2.#) jest wiec symetryczna. Dotyczy to także figury o sześciokrotnej symetrii obrotowej (tabela 2.#).

Figura o sześciokrotnej symetrii obrotowej

Wielokąt przedstawiony na rysunku 2.# ma sześciokrotną symetrię obrotową. Oprócz tożsamości ma obroty: o 60°, czyli $\frac{2\pi}{3}$ (C_6), a także o 120°, 180° i 240°. Identyczną symetrię ma ornament, przedstawiony na rysunku 2.#.

Rys. 2.12. Figura o sześciokrotnej symetrii obrotowej

Tabela 2.#. Tabela grupowa figury o sześciokrotnej symetrii obrotowej

	e	C_6	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5

e	e	C_6	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5
C_6	C_6	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	e
C_6^2	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5	e	C_6
C_6^3	C_6^3	C_6^4	C_6^5	e	C_6	C_6^2
C_6^4	C_6^4	C_6^5	e	C_6	C_6^2	C_6^3
C_6^5	C_6^5	e	C_6	C_6^2	C_6^3	C_6^4

W dalszym ciągu książki powrócimy jeszcze do różnicy pomiędzy przypadkiem, kiedy n jest liczbą pierwszą (tak jak 3 w przykładzie 1), a kiedy liczbą pierwszą nie jest (6 w przykładzie 2).

Symetria ramki z prądem

Symetrię podobną do omówionych w przykładach 1 i 2 ma ramka w której płynie prąd elektryczny, przedstawiona na rysunku 2.#. Można sobie wyobrazić, że jest to ramka z nadprzewodnika, bo wtedy niepotrzebne jest źródło napięcia. Układ ten ma symetrie obrotowe, identyczne jak na rysunku 2.#. Nie ma jednak symetrii odbiciowych – które zmieniałyby kierunek prądu elektrycznego.

Rys. 2.13. Obrotowe symetrie kwadratowej ramki z prądem elektrycznym

2.9 Symetrie sprzężone

Postawienie problemu

W paragrafie 1.# wprowadziliśmy pojecie izometrii sprzężonych. Mówiliśmy, ze sprzężone są dwa przekształcenia $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{c}$, jeżeli dla pewnej operacji $\boldsymbol{b}$ spełniona była równość:

(2.16) $$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{bab}^{-1}.$$

Teraz będziemy mówić podobnie o symetriach sprzężonych.
W sytuacji, kiedy rozważana figura ma skończona liczbę symetrii, mogą pojawić się pewne ograniczenia, których nie było dla izometrii „dowolnych”.
Rozpatrzmy to na przykładach.

Kwadrat

Dla kwadratu możemy sporządzić tabelę, która zawierać będzie złożenia typu 2.# dla wszystkich operacji symetrii (tabela 2.#).
W tabeli tej widać, że:

1. Operacja tożsamościowa i obrót dwukrotny sprzężone są tylko ze sobą.
2. Sprzężone są ze sobą obroty o kąt +90° i –90°.
3. Sprzężone są ze sobą odbicia względem linii, przechodzących przez środki boków kwadratu, czyli σ_1 i σ_3.
4. Sprzężone są ze sobą odbicia względem przekątnych σ_2 i σ_4.

Nie są natomiast sprzężone ze sobą odbicia „różnego rodzaju”, czyli na przykład σ_1 i σ_2.

Tabela 2.#. Złożenia $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{bab}^{-1}$

$\boldsymbol{a} \setminus \boldsymbol{b}$	e	C_2	C_4	C_4^3	σ_1	σ_3	σ_2	σ_4
e	e	e	e	e	e	e	e	e
C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2
C_4	C_4	C_4	C_4	C_4	C_4^3	C_4^3	C_4^3	C_4^3

C_4^3	C_4^3	C_4^3	C_4^3	C_4^3	C_4	C_4	C_4	C_4
σ_1	σ_1	σ_1	σ_3	σ_3	σ_1	σ_1	σ_3	σ_3
σ_3	σ_3	σ_3	σ_1	σ_1	σ_3	σ_3	σ_1	σ_1
σ_2	σ_2	σ_2	σ_4	σ_4	σ_4	σ_4	σ_2	σ_2
σ_4	σ_4	σ_4	σ_2	σ_2	σ_2	σ_2	σ_4	σ_4

Figury o przemiennych operacjach symetrii

Jeżeli wszystkie operacje symetrii figury są przemienne, wtedy każda z operacji jest sprzężona tylko ze sobą. Wynika to wprost ze wzoru 2.#. W rozważanym przypadku

(2.17) $$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{bab}^{-1} = \boldsymbol{abb}^{-1} = \boldsymbol{a}.$$

Jako przykład mogą służyć:
1. Prostokąt i romb (§2.5#).
2. Figury, które mają tylko symetrie obrotowe (§2.7#).

Zauważmy, że:
- W kwadracie istniały obroty $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}_2^2$, $\boldsymbol{C}_4^3$. Sprzężone były ze sobą obroty $\boldsymbol{C}_4$ i $\mathbf{C}_4^3$ (tabela 2.#).
- Figura z rysunku 2.# ma wszystkie obroty kwadratu. Jednak obroty $\boldsymbol{C}_4$ i $\boldsymbol{C}_4^3$ sprzężone ze sobą nie są.

Wrócimy do tego zagadnienia, kiedy będziemy omawiać klasy elementów sprzężonych i reprezentacje grup symetrii (§#).

2.10 Symetria obrazów dyfrakcji na otworach

Postawienie problemu

Jednym z typowych zagadnień optyki falowej jest dyfrakcja na otworach. Obserwuje się, że przy prostopadłym padaniu światła (rys.2.#) symetria obrazu dyfrakcyjnego jest ściśle związana z symetrią obiektu, na którym ugięcie światła zachodzi. Przedstawiają to fotografie 1.# – 1.#.

Rys. 2.14. Obserwacja dyfrakcji na otworach

Trójki fotografii przedstawiają sytuacje:
a. ekran bardzo blisko otworu. Obraz jest prawie dokładnie cieniem geometrycznym obiektu.
b. ekran w średniej odległości od obiektu. W tym przypadku mamy do czynienia z tak zwaną dyfrakcją Fresnela.
c. ekran bardzo daleko od obiektu, czyli zakres tak zwanej dyfrakcji Fraunhofera.

Wyobraźmy sobie, że otwór ma pewną operację symetrii – przechodzi w siebie pod wpływem obrotu lub odbicia. Na rysunku 2.# przedstawiony został otwór kwadratowy, który ma na przykład symetrię obrotu o 90°. Przypuśćmy, że przesłonę z otworem i ekran z obrazem dyfrakcyjnym poddaliśmy takiej operacji symetrii. Po jej dokonaniu sytuacja fizyczna jest taka sama jak przed jej dokonaniem. Zatem i obraz dyfrakcyjny musiał przejść w siebie. Wynika stąd, że symetria obrazu dyfrakcyjnego nie może być niższa, niż symetria samego otworu.

Wyniki doświadczeń

Wyniki doświadczeń potwierdzają nasze przewidywania.
1. Otwór kołowy. Wszystkie obrazy dyfrakcyjne mają pełną symetrię obrotową – taką jaką ma sam otwór.

2. Otwór kwadratowy. Sytuacja jest identyczna jak poprzednio. Uzyskane obrazy maja pełną symetrię kwadratu.
3. Otwór o kształcie trójkąta równobocznego. W przypadkach a i b obrazy dyfrakcyjne mają symetrię trójkątną. Natomiast obraz w granicy Fraunhofera ma symetrię sześciokątną, a wiec wyższą niż sam obiekt rozpraszający. Nie może to wynikać z samej symetrii układu, przyczyny należy szukać gdzie indziej. Obraz dyfrakcyjny w granicy Fraunhofera ma zawsze symetrię inwersji – niezależnie od kształtu otworu. Sprawa ta omówiona jest w dodatku A.

Rys. 2.15. Dyfrakcja na otworze kołowym

Rys. 2.16. Dyfrakcja na otworze kwadratowym

Rys. 2.17. Dyfrakcja na otworze trójkątnym

2.11 Symetria obrazów dyfrakcyjnych siatek płaskich i przestrzennych

Symetria obrazów dyfrakcji na siatkach płaskich lub przestrzennych jest ściśle związana z symetrią układu rozpraszającego.

Dyfrakcja na siatkach płaskich

Dyfrakcje na siatkach płaskich demonstruje się za pomocą układu, przedstawionego na rysunku 2.#. Rysunki 2.# przedstawiają typowe siatki dwuwymiarowe i uzyskane na nich obrazy dyfrakcyjne.

Rys. 2.18. Układ do badania dyfrakcji światła na siatkach płaskich

Rys. 2.19. Typowe obrazy dyfrakcji światła na siatkach płaskich

Dyfrakcja elektronów na kryształach

Układ do badania dyfrakcji elektronów na kryształach przedstawia schematycznie rysunek 2.#. Dla elektronów o niezbyt wielkich energiach w zerowym przybliżeniu można przyjąć, że ulegają rozproszeniu na powierzchni kryształu. Uzyskane obrazy dyfrakcyjne są bardzo podobne do dyfrakcji światła na siatkach płaskich. Dla dyfrakcji elektronów na monokrysztale niklu przedstawiają to fotografie 2.#.

Rys. 2.20. Układ do badania dyfrakcji elektronów na monokryształach

Rys. 2.21. Sieć przestrzenna kryształu niklu (fcc)

Rys. 2.22. Obrazy dyfrakcji elektronów na powierzchni monokryształu niklu.

Dyfrakcja promieni Roentgena i neutronów na kryształach

Układ do obserwacji dyfrakcji promieni Roentgena na kryształach przedstawia schematycznie rysunek 2.#. Mówimy tu o tak zwanej metodzie Lauego, w której obserwuje się dyfrakcję niemonochromatycznej wiązki promieni X na nieruchomym krysztale. Jeżeli wiązka pada na kryształ zgodnie z kierunkiem krystalograficznym o wysokiej symetrii, analogiczną symetrię ma i obraz dyfrakcyjny.

Rys. 2.23. Układ do badania dyfrakcji promieni Roentgena na monokryształach metodą Lauego

Rys. 2.24. Sieć przestrzenna kryształu chlorku sodu NaCl (soli kamiennej)

Rys. 2.25. Obraz dyfrakcji promieni Roentgena na krysztale NaCl. Wiązka padająca biegnie równolegle do kierunku o symetrii czterokrotnej

Zupełnie podobne obrazy dyfrakcyjne uzyskuje się i przy dyfrakcji neutronów na monokryształach.

Rys. 2.26. Obraz dyfrakcji neutronów termicznych na krysztale NaCl. Wiązka padająca biegnie równolegle do kierunku o symetrii czterokrotnej