

Symetria w fizyce

Rozdział 3

3.	Izometrie w trzech wymiarach.....	1
3.1	Izometrie w trzech wymiarach.....	1
3.2	Składanie izometrii w trzech wymiarach.....	3
3.3	Wynik złożenia izometrii w trzech wymiarach	4
3.4	Złożenie odbicia i obrotu	6
3.5	Izometrie sprzężone	7
3.6	Przekształcenia wektorów	8
3.7	Przekształcenia funkcji	10
3.8	Pseudowektory.....	10
3.9	Transformacje pseudowektorów.....	12

3. Izometrie w trzech wymiarach

W rozdziale następnym zajmiemy się symetriami obiektów przestrzennych, na przykład wielościanów czy cząsteczek chemicznych. Przedtem jednak – tym rozdziale – przypomnimy podstawowe wiadomości o izometriach w trzech wymiarach.

3.1 Izometrie w trzech wymiarach

Podstawowe typy izometrii w trzech wymiarach

Jak już przypomnieliśmy na początku rozdziału 1#, **izometrie** z definicji są przekształceniami, które zachowują odległości pomiędzy punktami przekształcanych obiektów. W trzech wymiarach dotyczy to na przykład przekształceń dowolnej bryły.

W trzech wymiarach wyróżniamy cztery podstawowe rodzaje izometrii:

1. **przesunięcia**,
2. **obroty względem prostych**,
3. **odbicia zwierciadlane**,
4. **obroty zwierciadlane**, a wśród nich **inwersję**.

Przypomnijmy je krótko po kolei.

Przesunięcie

Przesunięcie polega na tym, że każdy punkt przekształcanego obiektu zostaje przemieszczony w tym samym kierunku, z tym samym zwrotem i na tę samą odległość. W dwóch wymiarach przedstawiał to rysunek 1.#. Obrazem punktu P_1 jest punkt P_2 , przesunięty zgodnie z wektorem, wskazanym strzałką. W tej książeczce przesunięciami w przestrzeni prawie nie będziemy się zajmować.

Przekształcenia punktowe

Podobnie jak w rozdziale poprzednim zajmiemy się przede wszystkim przekształceniami punktowymi, które zachowują co najmniej jeden punkt przestrzeni. Można więc myślowo wyodrębnić z przekształcanej bryły trzy punkty, znajdujące się na powierzchni sferycznej. Nazwijmy je A_1 , B_1 i C_1 . Punkty te wyznaczają trójkąt sferyczny (rys.3.#).

Po przekształceniu tego trójkąta uzyskujemy trójkąt sferyczny do niego przystający. Izometrie punktowe mogą być dwóch rodzajów:

- zachowują orientację względem sfery, jak przekształcenie trójkąta $A_1B_1C_1$ w trójkąt $A_2B_2C_2$. W obu tych trójkątach obiegi wskazane przez strzałki są zgodne.
- zmieniają orientację względem sfery, jak przekształcenie trójkąta $A_1B_1C_1$ w trójkąt $A_3B_3C_3$. W tym ostatnim trójkącie strzałki wskazują obieg przeciwny do kierunku obiegu w trójkątach wymienionych wyżej.

Rys. 3.1. Izometrie na powierzchni sferycznej

Obrót

Obrotem o kąt α względem linii R , zwanej **osią obrotu**, nazywamy przekształcenie, które punktowi P_1 przypisuje punkt P_2 (rys.2.#)

- Punkt Q leży na przecięciu osi obrotu i prostej do niej prostopadłej, przechodzącej przez punkt P_1 .
- P_2 leży na prostej QP_2 , która także jest prostopadła do osi obrotu. Prosta ta z prostą QP_1 tworzy kąt α .
- długość odcinka QP_2 jest równa długości odcinka QP_1 .

Rys. 3.2. Obrót w trzech wymiarach

W dwóch wymiarach wszystkie rozważane przez nas obroty odbywały się wokół jednego wybranego punktu. Można je też było interpretować jako obroty wokół jednej osi, prostopadłej do omawianej płaszczyzny (§1.#). Rozważane przez nas obroty w trzech wymiarach zachodzą wokół prostych, przechodzących przez pewien ustalony punkt O . Przestrzenna orientacja tych prostych jest jednak dowolna.

Obroty zachowują orientację rozważanego wyżej trójkąta sferycznego.

Odbicie zwierciadlane

Odbiciem zwierciadlanym figury względem płaszczyzny S nazywamy przekształcenie, które punktowi P_1 przypisuje punkt P_2 (rys.3.#):

- P_2 leży na prostej przechodzącej przez punkt P , prostopadłej do linii płaszczyzny S , która przecina tę płaszczyznę w punkcie O ;
- długość odcinka OP_2 jest równa długości odcinka OP_1 .

Odbicie zmienia orientację rozważanego wyżej trójkąta sferycznego.

Rys. 3.3. Odbicie zwierciadlane

Inwersja

Inwersją figury względem punktu O nazywamy przekształcenie, które punktowi P_1 przypisuje punkt P_2 (rys.3.#a):

- P_2 leży na prostej przechodzącej przez punkt P_1 i punkt O .
- długość odcinka OP_2 jest równa długości odcinka OP_1 .

Inwersja, podobnie jak odbicie, zmienia orientację rozważanego wyżej trójkąta sferycznego.

Rys. 3.4. Inwersja

Na rysunku 3.# widać, że w trzech wymiarach inwersja nie jest tożsamościowo równa obrotowi o kąt π (czyli 180° , rys.3.#b).

Obrót zwierciadlany

Obrotem zwierciadlanym nazywamy izometrię, która polega na obrocie wokół osi o pewien kąt α i odbiciu od płaszczyzny do tej osi prostopadłej (rys.3.#a). Nie ma znaczenia, którą z tych operacji wykonamy najpierw (porównaj rysunek 3.#a z rysunkiem 3.#b). Obrót zwierciadlany o kąt α oznaczamy symbolem $\mathcal{S}(\alpha)$, o kąt $\frac{2\pi}{n}$ symbolem \mathcal{S}_n .

Obrót zwierciadlany zmienia orientację rozważanego wyżej trójkąta sferycznego. Jest bowiem złożeniem obrotu, który orientacji nie zmienia, i odbicia, które orientację zmienia.

Rys. 3.5. Obrót zwierciadlany

Inwersja jest obrotem zwierciadlanym o kąt π (rys.3.#).

Rys. 3.6. Inwersja jest odbiciem zwierciadlanym o kąt π

3.2 Składanie izometrii w trzech wymiarach

Złożenie dwóch izometrii jest też izometrią, bo każda z operacji składowych zachowuje odległości pomiędzy punktami figury. Przypuśćmy, że najpierw dokonaliśmy izometrii a , a potem izometrii b . Złożenie tych dwóch przekształceń symetrii daje w wyniku izometrię c . W paragrafie 1.# przyjęliśmy następującą konwencję zapisu:

$$(3.1) \quad c = b \cdot a .$$

Wszystkie omówione tam konwencje stosują się i do izometrii w trzech wymiarach. Zaczniemy od kilku przykładów, na które stale w przyszłości będziemy się powoływać.

Przykład 1

Złożenie dwóch obrotów względem tej samej osi, odpowiednio o kąty α i β , jest także obrotem o kąt równy sumie kątów, czyli o $\alpha + \beta$. Przedstawia to w zasadzie rysunek 1.#, trzeba tylko wyobrazić sobie, że patrzymy na obrót przestrzenny wzdłuż osi obrotu.

Przykład 2

Złożenie dwóch obrotów o π względem osi prostopadłych daje obrót o π względem osi prostopadłej do osi poprzednich (rys.3.#).

Rys. 3.7. Złożenie dwóch obrotów o π względem osi prostopadłych

Do problemu ogólnego składania obrotów w przestrzeni powrócimy jeszcze w rozdziałach następnych.

Przykład 3

Złożenie dwóch odbić względem dwóch płaszczyzn S_1 i S_2 , tworzących ze sobą kąt γ , jest obrotem o kąt 2γ względem linii R , stanowiącej przecięcie tych płaszczyzn.. Przedstawia to w zasadzie rysunek 1.#. Należy sobie tylko wyobrazić, że patrzymy na powierzchnie odbijające wzdłuż linii ich przecięcia.

W szczególności odbicie od dwóch powierzchni prostopadłych daje obrót o π (rys.3.#).

Rys. 3.8. Złożenie dwóch odbić zwierciadlanych

Rys. 3.9. Złożenie dwóch odbić zwierciadlanych od płaszczyzn do siebie prostopadłych

Można to łatwo zauważyć, patrząc na swoje odbicie w dwóch lusterkach, ustawionych względem siebie pod kątem prostym.

Rys. 3.10. Oglądamy swoje odbicie od układu dwóch prostopadłych luster

Przykład 4

Stwierdziliśmy wyżej, że:

- złożenie dwóch odbić zwierciadlanych od dwóch płaszczyzn prostopadłych jest obrotem o kąt π względem linii ich przecięcia;
- inwersja jest złożeniem obrotu o kąt π i odbicia zwierciadlanego od płaszczyzny prostopadłej do osi obrotu.

Wynika stąd, że inwersja jest złożeniem trzech odbić zwierciadlanych od trzech płaszczyzn wzajemnie do siebie prostopadłych.

Rys. 3.11. Inwersja jest złożeniem trzech odbić zwierciadlanych od trzech płaszczyzn wzajemnie prostopadłych

Można to łatwo zauważyć, patrząc na swoje odbicie w trzech lusterkach, ustawionych względem siebie pod kątem prostym.

Rys. 3.12. Oglądamy swoje odbicie od układu trzech prostopadłych luster

Przykład 5

Złożenie obrotu o kąt π i inwersji jest odbiciem zwierciadlanym względem płaszczyzny prostopadłej do osi obrotu. Przedstawia to rysunek 3.#.

Rys. 3.13. Złożenie obrotu o kąt π i inwersji jest odbiciem zwierciadlanym

Dalsze przykłady składania izometrii omówimy w następnych paragrafach.

3.3 Wynik złożenia izometrii w trzech wymiarach

Obrót wokół linii R przechodzącej przez wybrany punkt O , odbicie względem płaszczyzny S przechodzącej przez ten punkt, czy inwersja, zachowują odległości punktów od punktu O . Zatem przekształcają powierzchnię sferyczną o środku w O w samą siebie. Można więc wybrać trzy punkty przekształcanej figury A_1 , B_1 i C_1 , które znajdują się na sferze tego rodzaju – tak jak to robiliśmy w paragrafie poprzednim dla dwóch punktów figury płaskiej. Po dokonaniu dowolnej liczby przekształceń uzyska się trójkę punktów figury przekształconej A_2 , B_2 i C_2 , które są obrazami punktów A_1 , B_1 i C_1 . Punkty te leżą na tej samej powierzchni sferycznej, co punkty A_1 , B_1 i C_1 . Są przy tym tylko dwie możliwości:

- Orientacja punktów A_2 , B_2 i C_2 , jest względem powierzchni sferycznej identyczna jak punktów A_1 , B_1 i C_1 (rys.3.#a). Wtedy trójkę punktów A_2 , B_2 i C_2 można przekształcić w A_1 , B_1 i C_1 **jednym obrotem** wokół pewnej linii R .
- Orientacja punktów A_2 , B_2 i C_2 jest względem okręgu przeciwna, niż punktów A_1 , B_1 i C_1 (rys.3.#b). Wtedy parę punktów A_1 , B_1 można przekształcić w A_2 , B_2 za pomocą **jednego obrotu i jednego odbicia**.

Zatem wynik dowolnej liczby izometrii punktowych w przestrzeni da się przedstawić jako złożenie co najwyżej dwóch izometrii (patrz też dalej, §3.#).

Rys. 3.14. Wynik przekształceń symetrii. Szczegóły w tekście

Dygresja

Nim wykazemy powyższe stwierdzenia, rozważmy pewien problem dwuwymiarowy. Wyobraźmy sobie dwa trójkąty przystające, leżące na płaszczyźnie. Są dwie możliwości:

1. trójkąty mają identyczną orientację przestrzenną;
2. trójkąty mają przeciwne orientacje przestrzenne.

W przypadku 1 trójkąt $A_1B_1C_1$ można przekształcić w trójkąt $A_2B_2C_2$ za pomocą dwóch odbić zwierciadlanych:

Rys. 3.15. Trójkąt $A_1B_1C_1$ można przekształcić w trójkąt $A_2B_2C_2$ za pomocą dwóch odbić zwierciadlanych:

- a. najpierw przekształcamy przez odbicie punkt A_1 w punkt A_2 (rys.3.#a),
- b. potem przekształcamy przez odbicie punkt B_1 w punkt B_2 (rys.3.#b). Jeżeli orientacja trójkątów była taka sama, po obu tych przekształceniach punkt C_1 przejdzie już w punkt C_2 „automatycznie”.

Wiemy już jednak z paragrafu 1.#, że złożenie dwóch odbić jest obrotem. Zatem można przekształcić trójkąt $A_1B_1C_1$ w trójkąt $A_2B_2C_2$ za pomocą **jednego obrotu**.

Rys. 3.16. Trójkąt $A_1B_1C_1$ można przekształcić w trójkąt $A_2B_2C_2$ za pomocą odbicia zwierciadlanego i obrotu

W przypadku 2 trójkąt $A_1B_1C_1$ można przekształcić w trójkąt $A_2B_2C_2$ za pomocą odbicia zwierciadlanego i obrotu:

- a. najpierw przekształcamy punkt A_1 w punkt A_2 (rys.3.#a), uzyskujemy przy tym „przejściowy” trójkąt $A_3B_3C_3$. Ponieważ orientacja trójkątów $A_2B_2C_2$ i $A_1B_1C_1$ była przeciwna, orientacja trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_3B_3C_3$ jest zgodna.
- b. W drugim kroku obracamy trójkąt $A_3B_3C_3$ względem wierzchołka A_3 (czyli A_2) i doprowadzamy do przekrycia się trójkątów (rys.3.#b).

Zatem można przekształcić trójkąt $A_2B_2C_2$ w trójkąt $A_1B_1C_1$ za pomocą **jednego odbicia i jednego obrotu**.

Przekształcenia w trzech wymiarach

Wyniki tych przykładów płaskich można przetransponować na przypadek przestrzennych przekształceń na powierzchni sferycznej (rys.3.#). Należy tylko zamienić:

- odbicia względem prostych w dwóch wymiarach na odbicia względem płaszczyzn przechodzących przez środek powierzchni sferycznej;
- obrót względem punktu na obrót względem linii przechodzącej przez środek powierzchni sferycznej.

Rys. 3.17. Składanie izometrii (szczegóły w tekście)

Złożenie kilku obrotów w przestrzeni

Z powyższych rozważań wynika bardzo ważny wniosek: złożenie dowolnej liczby obrotów względem osi, przechodzących przez jeden punkt, można zastąpić jednym obrotem względem takiej osi.

Do problemu ogólnego składania obrotów w przestrzeni powrócimy jeszcze w rozdziałach następnych.

3.4 Złożenie odbicia i obrotu

Niejednoznaczność

W paragrafie poprzednim stwierdziliśmy, że dwa przystające trójkąty sferyczne o **przeciwniej** orientacji, leżące na tej samej powierzchni sferycznej, można przeprowadzić w siebie za pomocą jednego odbicia zwierciadlanego i jednego obrotu. Podaliśmy tam dość szczegółowy przykład takiego przekształcenia, w którym odbicie przeprowadzało jeden z wierzchołków trójkąta wyjściowego $A_1B_1C_1$ w jeden z wierzchołków trójkąta przekształconego $A_2B_2C_2$. Łatwo jednak uzmysłowić sobie, że tego typu przekształceń jest więcej – na prawdę nieskończenie wiele. Możemy bowiem odbić trójkąt wyjściowy $A_1B_1C_1$ względem dowolnej płaszczyzny. Uzyskamy wtedy trójkąt przejściowy $A_3B_3C_3$ o orientacji przeciwnej niż $A_1B_1C_1$, a identycznej jak $A_2B_2C_2$. Trójkąt $A_3B_3C_3$ możemy przekształcić w $A_2B_2C_2$ za pomocą jednego obrotu – co wykazaliśmy w paragrafie poprzednim. Płaski model tych transformacji przedstawia rysunek 3.#.

Rys. 3.18. Płaski model składania dowolnego odbicia i odpowiedniego obrotu

Obrót zwierciadlany

Nasuwa się więc pytanie: czy można dokonać przekształcenia trójkąta $A_1B_1C_1$ w trójkąt $A_2B_2C_2$ za pomocą **jednego obrotu zwierciadlanego**, czyli jednego obrotu względem pewnej osi i jednego odbicia względem płaszczyzny do tej osi prostopadłej?

Spójrzmy na problem, zaczynając „od tyłu” (rys.3.#):

Rys. 3.19. Dwa trójkąty sferyczne o przeciwnej orientacji można przeprowadzić w siebie za pomocą jednego obrotu zwierciadlanego (szczegóły w tekście)

1. Dokonajmy inwersji i trójkąta $A_2B_2C_2$ względem punktu O . Otrzymamy pomocniczy trójkąt $A_3B_3C_3$, który ma symetrię przeciwną, niż trójkąt $A_2B_2C_2$, a taką samą jak trójkąt $A_1B_1C_1$.
2. Wykazaliśmy wyżej, że trójkąt $A_1B_1C_1$ można przeprowadzić w trójkąt $A_3B_3C_3$ za pomocą jednego obrotu wokół pewnej osi R . Oznaczmy to przekształcenie symbolem $C(\alpha, R)$.
3. Wiemy, że inwersja jest złożeniem obrotu o kąt π względem **dowolnej** osi R i odbicia zwierciadlanego względem płaszczyzny prostopadłej do tej osi $\sigma(R)$. Można więc jako tę wyróżniona oś wybrać linię R . Inwersję i zapiszemy wtedy w postaci:

$$(3.2) \quad i = \sigma(R) \cdot C(\pi, R).$$

Zbierzmy te fakty: Przekształcenie trójkąta $A_1B_1C_1$ w trójkąt $A_2B_2C_2$ zachodzi przez złożenie operacji obrotu względem osi l i inwersji (wzór 3.#). Można je więc zapisać w postaci:

$$(3.3) \quad i \cdot \alpha(R) = \sigma(R) \cdot C(\pi, R) \cdot C(\alpha, R) = \sigma(R) \cdot C(\gamma, R).$$

Operacja $C(\gamma, R)$ jest złożeniem dwóch obrotów względem tej samej osi R , jednego o kąt α , drugiego o kąt π . Jest więc obrotem wokół osi R o kąt $\gamma = \pi + \alpha$. Natomiast $\sigma(R)$ jest odbiciem od płaszczyzny prostopadłej do R .

Podsumujmy: Istnieje nieskończona liczba par operacji, złożonych z obrotu i odbicia zwierciadlanego, a przekształcających trójkąt $A_1B_1C_1$ w trójkąt $A_2B_2C_2$. Wśród tych operacji jest także **odbicie zwierciadlane**, dla którego oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny odbicia.

3.5 Izometrie sprzężone

Wprowadzenie

W rozdziale 1 rozważaliśmy izometrie do siebie „podobne”:

- odbicie zwierciadlane względem linii L_2 „podobne” do odbicia względem Linii L_1 ;
- obrót o kąt 90° „podobny” do obrotu o -90° , itp.

Aby opisać ten fakt bardziej precyzyjnie, wprowadziliśmy pojęcie **izometrii sprzężonych**.

Formułowaliśmy to następująco:

Mówimy, że izometrie c i a są sprzężone, jeżeli izometria c da się przedstawić przez izometrie a i b w postaci

$$(3.4) \quad c = bab^{-1},$$

Uogólnimy teraz definicję izometrii sprzężonych na przypadek trzech wymiarów. Będziemy oczekiwać, że na przykład:

1. sprzężone są ze sobą wszystkie odbicia zwierciadlane;
2. sprzężone są ze sobą wszystkie obroty o kąt 60° – względem dowolnych osi, itp.

Rozpatrzmy teraz kilka przykładów takich właśnie izometrii sprzężonych.

Dygresja 1

Rozważmy jednak najpierw pewien problem dwuwymiarowy, który posłuży nam jako analogia interesującego nas zagadnienia. Rozpatrzmy płaszczyznę z dwoma punktami O_1 i O_2 , wokół których będziemy dokonywać obrotów (rys.3.#). Niech wektor \vec{r} łączy punkt O_1 z punktem O_2 . Niech na tej płaszczyźnie znajduje się trójkąt $A_1B_1C_1$.

Rys. 3.20. Dwa sprzężone obroty na płaszczyźnie

Obrócić ten trójkąt o kąt α wokół osi O_2 – aby otrzymać trójkąt $A_2B_2C_2$ – można następująco:

1. przesunąć trójkąt o wektor $-\vec{r}$, otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_3B_3C_3$;
2. obrócić ten nowy trójkąt o kąt α wokół punktu O_1 , otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_4B_4C_4$;
3. przesunąć ten trójkąt o wektor $+\vec{r}$. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_2B_2C_2$, który właśnie jest trójkątem $A_1B_1C_1$, obróconym względem punktu O_2 o kąt α .

Obroty sprzężone w trzech wymiarach

W podobny sposób możemy dokonać operacji punktowych w trzech wymiarach. Rozważmy dwie osie obrotu R_1 i R_2 , które można przeprowadzić w siebie za pomocą przestrzennego obrotu o kąt φ wokół osi R (rys.3.#). Weźmy od uwagę trójkąt sferyczny $A_1B_1C_1$. Obrócić ten trójkąt wokół osi R_2 o kąt α – aby otrzymać trójkąt $A_2B_2C_2$ – możemy następująco:

Rys. 3.21. Dwa sprzężone obroty w przestrzeni

1. obrócić trójkąt wokół osi R o kąt $-\varphi$. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_3B_3C_3$.
2. obrócić ten nowy trójkąt o kąt α wokół osi R_1 . Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_4B_4C_4$.
3. obrócić trójkąt wokół osi R o kąt $+\varphi$. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_2B_2C_2$, który właśnie jest trójkątem $A_1B_1C_1$, obróconym względem osi 2 o kąt α .

Wykazaliśmy w ten sposób, że dwa rozważane obroty są ze sobą sprzężone.

Dygresja 2

Będziemy teraz chcieli wykazać, że dowolne dwa odbicia w przestrzeni są ze sobą sprzężone. Rozważmy jednak najpierw – podobnie jak poprzednio – pewien model dwuwymiarowy.

Rozpatrzmy płaszczyznę z dwiema liniami L_1 i L_2 , względem których będziemy dokonywać odbić (rys.3.#). Linie L_1 i L_2 przecinają się w punkcie P i tworzą ze sobą kąt φ . Niech na tej płaszczyźnie znajduje się trójkąt $A_1B_1C_1$.

Rys. 3.22. Sprzężone odbicia na płaszczyźnie

Odbić ten trójkąt względem osi L_2 – aby otrzymać trójkąt $A_2B_2C_2$ – można następująco:

1. obrócić trójkąt $A_1B_1C_1$ względem punktu P o kąt $-\varphi$. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_3B_3C_3$;
2. odbić ten nowy trójkąt względem linii L_1 ; otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_4B_4C_4$;
3. obrócić trójkąt $A_4B_4C_4$ względem punktu P o kąt $+\varphi$. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_2B_2C_2$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że dwa odbicia w płaszczyźnie są ze sobą sprzężone.

Odbicia sprzężone w trzech wymiarach

Przełożmy ten przykład na izometrie punktowe w trzech wymiarach. Rozważmy dwa odbicia względem płaszczyzn S_1 i S_2 , które przecinają się wzdłuż linii R i tworzą ze sobą kąt φ (rys.3.#). Rozważmy trójkąt sferyczny na powierzchni rozważanej już wyżej powierzchni sferycznej.

Rys. 3.23. Sprzężone odbicia w przestrzeni

Odbić ten trójkąt względem płaszczyzny S_2 – aby otrzymać trójkąt $A_2B_2C_2$ – można następująco:

1. obrócić trójkąt $A_1B_1C_1$ względem osi R o kąt $-\varphi$. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_3B_3C_3$;
2. odbić ten nowy trójkąt względem płaszczyzny S_1 ; otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_4B_4C_4$;
3. obrócić trójkąt $A_4B_4C_4$ względem osi R o kąt $+\varphi$. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A_2B_2C_2$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że dwa dowolne odbicia w przestrzeni są ze sobą sprzężone.

Do zagadnienia symetrii sprzężonych w trzech wymiarach będziemy jeszcze wracać wielokrotnie (np. w §§4,#,)

3.6 Przekształcenia wektorów

Zastanówmy się teraz, jak pod wpływem różnych izometrii transformują się w przestrzeni wektory. Uogólnimy w ten sposób na trzy wymiary rozważania z paragrafu 1.#.

Rozpatrzmy pewien przestrzenny wektor \vec{x} o początku w punkcie O , który zachowują rozważane izometrie. Pod wpływem izometrii \mathbf{a} przejdzie on w inny wektor \vec{y} . Napiszemy to formalnie (podobnie jak w paragrafie 1.#):

$$(3.5) \quad \vec{y} = \hat{\mathbf{a}}\vec{x}.$$

Symbolem $\hat{\mathbf{a}}$ oznaczyliśmy **operator**, przekształcający pierwszy z wektorów w drugi.

Ponieważ operacja przekształcenia jest izometrią, wartość wektora \vec{y} jest taka sama jak wartość wektora \vec{x} . Natomiast kierunek i zwrot są na ogół inne.

Transformacja wektora przy inwersji

Inwersja zachowuje kierunek wektora \vec{x} , a zmienia jego zwrot na przeciwny. Dla inwersji możemy więc napisać:

$$(3.6) \quad \vec{y} = -\vec{x}.$$

Transformacja wektora przy odbiciu

Zastanówmy się teraz, jaki jest wektor \vec{y} , który stanowi odbicie wektora \vec{x} względem linii płaszczyzny S (rys.3.#). Wersor \vec{n} jest do tej powierzchni prostopadły. Z rysunku widać, że natychmiast można uogólnić wzór 1.# na trzy wymiary i napisać:

$$(3.7) \quad \vec{y} = \vec{x} - 2(\vec{n}\vec{x})\vec{n},$$

czyli (por. wzór 1.#)

$$(3.8) \quad \vec{y} = \vec{x} - 2\vec{x}_{\perp}.$$

gdzie teraz \vec{x}_{\perp} oznacza składową wektora \vec{x} , prostopadłą do płaszczyzny S.

Rys. 3.24. Odbicie wektora od płaszczyzny

Ze wzoru 3.# widać, że dowolność wyboru zwrotu wersora \vec{n} nie wpływa na wektor \vec{y} . Dla dwóch wymiarów omówiliśmy to w paragrafie 1.#.

Transformacja wektora przy obrocie

Rozpatrzmy teraz obrót wektora \vec{x} o kąt α względem osi R w przestrzeni (rys.3.#). Oznaczmy wersor tej osi symbolem \vec{r} . Musimy napisać wzór, określający wektor przekształcony \vec{y} .

Nasze rozumowanie będzie podobne do przedstawionego w paragrafie 1.#.

Rys. 3.25. Obrót wektora

1. Rozłożymy przede wszystkim wektor \vec{x} na dwie składowe: równoległą do osi obrotu \vec{x}_{\parallel} i prostopadłą do osi obrotu \vec{x}_{\perp} . Podczas obrotu pierwsza z tych składowych jest zachowana, czyli $\vec{y}_{\parallel} = \vec{x}_{\parallel}$. Obraca się tylko składowa druga.
2. Kierunek składowej równoległej wyznacza wersor \vec{r} . Wartość i zwrot – iloczyn skalarny $\vec{r}\vec{x}$. Możemy więc napisać (patrz też rys.3.#):

$$(3.9) \quad \vec{x}_{\parallel} = \vec{r}(\vec{r}\vec{x}).$$

3. Składowa prostopadła jest równa:

$$(3.10) \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} = \vec{x} - \vec{r}(\vec{r}\vec{x}).$$

4. Wprowadźmy jeszcze, podobnie jak w paragrafie 1.#, pomocniczy wektor \vec{p} , który ma długość wektora \vec{x}_{\perp} , a kierunek prostopadły i do \vec{r} i do \vec{x}_{\perp} :

$$(3.11) \quad \vec{p} = \vec{r} \times \vec{x}_{\perp} = \vec{r} \times (\vec{x} - \vec{x}_{\parallel}) = \vec{r} \times \vec{x} - \vec{r} \times \vec{x}_{\parallel} = \vec{r} \times \vec{x}.$$

Zauważyliśmy, że iloczyn wektorowy równoległych wektorów \vec{r} i \vec{x}_{\parallel} znika.

5. Rozumując podobnie jak w paragrafie 1.#, możemy napisać wzór na składową prostopadłą wektora \vec{y} , czyli na \vec{y}_{\perp} :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \vec{y}_{\perp} &= \cos \alpha \cdot \vec{x}_{\perp} + \sin \alpha \cdot \vec{p} = \\ &= \cos \alpha [\vec{x} - \vec{r}(\vec{r}\vec{x})] + \sin \alpha (\vec{r} \times \vec{x}) = \\ &= \cos \alpha \cdot \vec{x} - \cos \alpha \vec{r}(\vec{r}\vec{x}) + \sin \alpha (\vec{r} \times \vec{x}). \end{aligned}$$

Na cały wektor obrócony \vec{y} dostajemy wzór (korzystamy z 3.# ...):

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{y}_{\parallel} + \vec{y}_{\perp} = \vec{x}_{\parallel} + \cos \alpha \cdot \vec{x} - \cos \alpha \vec{r}(\vec{r}\vec{x}) + \sin \alpha(\vec{r} \times \vec{x}) = \\ (3.13) \quad &= \vec{r}(\vec{r}\vec{x}) + \cos \alpha[\vec{x} - \vec{r}(\vec{r}\vec{x})] + \sin \alpha(\vec{r} \times \vec{x}) = \\ &= \cos \alpha \cdot \vec{x} + (1 - \cos \alpha) \cdot \vec{r}(\vec{r}\vec{x}) + \sin \alpha(\vec{r} \times \vec{x}). \end{aligned}$$

Inaczej można to też zapisać w postaci:

$$(3.14) \quad \vec{y} = \vec{x}_{\parallel} + \cos \alpha \cdot \vec{x}_{\perp} + \sin \alpha \cdot (\vec{r} \times \vec{x}_{\perp}).$$

Zauważyliśmy, że $\vec{r} \times \vec{x} = \vec{r} \times \vec{x}_{\perp}$.

Transformacja wektora przy obrocie zwierciadlanym

Przy obrocie zwierciadlanym $S(\alpha, R)$ o kąt α względem osi R (rys.3.#):

1. składowa prostopadła wektora \vec{r} , czyli \vec{x}_{\perp} , transformuje się tak, jak przy zwykłym obrocie;
2. składowa równoległa wektora \vec{r} , czyli \vec{x}_{\parallel} , zmienia znak.

Wzór 3.# należy więc zmodyfikować następująco:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= -\vec{x}_{\parallel} + \cos \alpha \cdot \vec{x}_{\perp} + \sin \alpha \cdot \vec{p} = \\ (3.15) \quad &= -\vec{r}(\vec{r}\vec{x}) + \cos \alpha[\vec{x} - \vec{r}(\vec{r}\vec{x})] + \sin \alpha(\vec{r} \times \vec{x}) = \\ &= \cos \alpha \cdot \vec{x} - (1 + \cos \alpha) \cdot \vec{r}(\vec{r}\vec{x}) + \sin \alpha(\vec{r} \times \vec{x}). \end{aligned}$$

3.7 Przekształcenia funkcji

Rozpatrzmy jeszcze transformację funkcji trzech zmiennych, czyli funkcji wektora \vec{x} :

$$(3.16) \quad f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$$

określonej w rozważanej przestrzeni. Rozumowanie jest uogólnieniem na trzy wymiary rozważań prowadzonych w paragrafie 1.#.

Pod wpływem operacji \hat{a} funkcja $f(\vec{x})$ przejdzie w na ogół nową funkcję

$$(3.17) \quad g(\vec{x}) = \hat{a}f(\vec{x}).$$

Symbolem \hat{a} oznaczyliśmy **operator**, działający na funkcję $f(\vec{x})$. Podobnie jak poprzednio nowa funkcja $g(\vec{x})$ w punkcie \vec{x} ma taką wartość, jaką miała stara funkcja w punkcie $\hat{a}^{-1}\vec{x}$

$$(3.18) \quad g(\vec{x}) = \hat{a}f(\vec{x}) = f(\hat{a}^{-1}\vec{x}).$$

Trudno to narysować w przestrzeni, a rysunki dla dwóch wymiarów znajdowały się w paragrafie 1.#.

3.8 Pseudowektory

W fizyce często posługujemy się wielkościami, które zdefiniowane są jako iloczyn wektorowy dwóch wektorów. Należy do nich na przykład **moment pędu**¹ \vec{L} , który definiujemy jako iloczyn wektorowy dwóch wektorów: wektora wodzącego² \vec{r} i pędu \vec{p} .

¹ Nazwy *moment pędu* używa się w Kongresówce. W Galicji tę wielkość nazywa się **krętem**.

² W tym fragmencie zachowaliśmy zwyczajowe oznaczenia wektora wodzącego i pędu. Nie pomyłmy ich z oznaczeniami używanymi w poprzednich paragrafach!

$$(3.19) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Moment pędu ma względem obrotów identyczne własności symetrii jak wektor. Natomiast inaczej zachowuje się przy odbiciu. Dlatego wielkość zdefiniowaną jako iloczyn wektorowy dwóch wektorów nazywamy **pseudowektorem**.

W tej książeczce pseudowektory będziemy oznaczać strzałką zwróconą w lewo (\leftarrow), aby odróżnić je od „prawdziwych” wektorów, które oznaczaliśmy strzałką zwróconą w prawo (\rightarrow).

Przekształcenie wektorów przy odbiciu

Rozpatrzmy najpierw dla porównania transformację wektorów: osobno dwa przypadki, sytuację, kiedy wektor \vec{w} jest prostopadły i kiedy jest równoległy do płaszczyzny odbiciowej (rys.3.#, por. też §3#).

Rys. 3.26. Zachowanie wektorów przy odbiciu

1. Jeżeli wektor jest prostopadły do płaszczyzny odbicia, przy odbiciu zmienia znak.
2. Jeżeli wektor jest równoległy do płaszczyzny odbicia, przy odbiciu nie zmienia znaku.

Przekształcenie pseudowektorów przy odbiciu

A teraz rozpatrzmy transformację pseudowektorów, także osobno dwa przypadki: sytuację, kiedy pseudowektor jest prostopadły i kiedy jest równoległy do płaszczyzny odbiciowej.

Rys. 3.27. Zachowanie pseudowektorów przy odbiciu

1. Przypadek pierwszy przedstawiają rysunki 3.#a i b. Oba wektory \vec{r} i \vec{p} leżą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny odbicia. Przed odbiciem ich iloczyn wektorowy \vec{L} jest – z definicji – prostopadły do płaszczyzny odbicia i ma zwrot wskazany na rysunku 3.#a. Odbicie przeprowadza wektory \vec{r} i \vec{p} w siebie (rys.3.#b). A więc ich iloczyn wektorowy pozostaje taki sam.
Stąd wniosek: przy odbiciu składowa pseudowektora prostopadła do płaszczyzny odbicia pozostaje taka sama. Składowa prostopadła „prawdziwego” wektora \vec{w} przy odbiciu zmienia znak.
2. Przypadek drugi przedstawiają rysunki 3.#c i d. Wektor \vec{r} leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny odbicia, wektor \vec{p} jest do niej prostopadły. Przed odbiciem ich iloczyn wektorowy \vec{L} jest – z definicji – równoległy do płaszczyzny odbicia i ma zwrot wskazany na rysunku 3.#c. Odbicie przeprowadza wektor \vec{r} w siebie, wektor \vec{p} zmienia znak (rys.3.#d). Ich iloczyn wektorowy zmienia znak.
Stąd wniosek: przy odbiciu składowa pseudowektora równoległa do płaszczyzny odbicia zmienia znak. Składowa równoległa „prawdziwego” wektora \vec{w} przy odbiciu nie zmienia się.

Inne przykłady pseudowektorów

W fizyce wiele znanych wielkości – to pseudowektory. Na przykład pseudowektorami są:

1. Indukcja magnetyczna \vec{B} . Indukcję magnetyczną pojedynczego ładunku Q , poruszającego się z prędkością \vec{v} określa wzór (rys.3.#):

Rys. 3.28. Do definicji indukcji magnetycznej pojedynczego poruszającego się ładunku

$$(3.20) \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2} \left(\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r} \right).$$

Symbol \vec{r} określa wektor od punktu, w którym ładunek się znajduje, do punktu obserwacji, μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.

2. Moment magnetyczny \vec{p}_m zamkniętego przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu I .

Jest on określony całką krzywoliniową (rys.3.#):

Rys. 3.29. Do definicji momentu magnetycznego

$$(3.21) \quad \vec{p}_m = \frac{1}{2} I \oint_L \vec{r} \times d\vec{l}.$$

Do właściwości symetrii momentu magnetycznego powrócimy jeszcze w paragrafie #.

Iloczyn wektorowy wektora i pseudowektora

Iloczyn wektorowy wektora i pseudowektora jest wektorem. Na przykład wzór na siłę Lorentza ma postać:

$$(3.22) \quad \vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

We wzorze tym prędkość \vec{v} i siła \vec{F} są wektorami, a indukcja magnetyczna \vec{B} jest pseudowektorem.

3.9 Transformacje pseudowektorów

Omówmy teraz transformacje pseudowektorów trochę ogólniej, niż w paragrafie poprzednim. Będziemy rozważali pewien pseudowektor \vec{u} , który jest iloczynem wektorowym wektorów \vec{w} i \vec{v} :

$$(3.23) \quad \vec{u} = \vec{w} \times \vec{v}.$$

Transformacja pseudowektora przy obrocie

Z definicji pseudowektor \vec{u} jest prostopadły do wektorów \vec{w} i \vec{v} , spełnia regułę „prawej śruby” i ma wartość równą:

$$(3.24) \quad |\vec{u}| = AB \sin \varphi,$$

gdzie φ jest kątem pomiędzy wektorami \vec{w} i \vec{v} .

Przy dokonywaniu obrotu o kąt α względem pewnej linii L zachowane są kąty i wartości odcinków. Trójkę wielkości \vec{w} , \vec{v} i \vec{u} możemy więc traktować jako „sztywno powiązane strzałki”, które obracają się wspólnie (rys.3.#). Zatem przy obrotach pseudowektor transformuje się jak wektor.

Rys. 3.30. Transformacja pseudowektora przy obrocie

Transformacja pseudowektora przy inwersji

Przy dokonywaniu inwersji wektory \vec{w} i \vec{v} zmieniają znaki (§3.6#). Ich iloczyn wektorowy pozostaje **niezmieniony**, bo (rys3.#):

$$(3.25) \quad (-\vec{w}) \times (-\vec{v}) = \vec{w} \times \vec{v} = \vec{u}.$$

Transformacja pseudowektora przy odbiciu

Odbicie od płaszczyzny S możemy potraktować jako złożenie (§#):

1. obrotu o kąt π względem linii R, prostopadłej do płaszczyzny S;
2. inwersji.

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy powyżej (rys.3.#):

1. przy obrocie wektory \vec{w} i \vec{v} i pseudowektor \vec{u} obracają się łącznie o kąt π względem linii R;
2. przy inwersji pseudowektor się nie zmienia.

Zatem: przy dokonywaniu operacji odbicia pseudowektor obraca się o kąt π względem linii prostopadłej do płaszczyzny odbicia.

Podsumowując uwagi powyższe i zamieszczone wcześniej, w paragrafie poprzednim:

Jeżeli w jakimś układzie współrzędnych przed odbiciem wektor i pseudowektor by się pokrywały, po odbiciu miałyby taki sam kierunek, ale zwroty przeciwne (rys.3.#)

Rys. 3.31. Transformacja wektora i pseudowektora przy odbiciu zwierciadlanym.

Do transformacji pseudowektorów wrócimy jeszcze w paragrafie 4.#.