Symetria w fizyce
Dodatek A

A. Dyfrakcja w przybliżeniu Huygensa-Fresnela

Wprowadzenie

Przypomnijmy, jak opisuje się dyfrakcję w skalarnym przybliżeniu Huygensa–Fresnela. Ograniczymy się do przypadku, kiedy na otwór w płaskiej przesłonie prostopadle pada fala płaska. W tym paragrafie użyjemy oznaczeń, normalnie przyjętych w fizyce.
W przybliżeniu Huygensa–Fresnela mówi się (rys.A.#):

Rys. A.1. Do opisu dyfrakcji na otworze

1. Duży otwór możemy myślowo podzielić na wiele otworków o rozmiarach mniejszych od długości fali.
2. Każdy z takich otworków traktujmy jako źródło nowej fali kulistej. Ponieważ na otwór pada prostopadle fala płaska, wszystkie rozważane otworki wysyłają fale w zgodnych fazach. Amplituda fali rozproszonej na n-tym otworku jest proporcjonalna do powierzchni otworka Δs_n. Falę taką w punkcie obserwacji P odległym od otworka o r_n można zapisać w formie

(A.1) $$U(r_n,t)=\Delta s_n A(r_n)\cos(kr_n-\omega t)\,.$$

We wzorze tym $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ jest liczbą falową, λ długością fali a ω częstością kołową, a $A(r_n)$ opisuje zależność amplitudy fali kulistej od odległości od otworu (jest to zależność typu $\dfrac{1}{r_n^2}$).

3. Obraz dyfrakcyjny opisujemy jako wynik interferencji fal ze wszystkich otworków. Jest ona zatem sumą wyrażeń A.# po wszystkich otworkach. Przechodząc do obrazu uciąglonego, zapiszemy ją jako całkę powierzchniową po całym otworze:

(A.2) $$U(\vec{r}_{\mathrm{P}},t)=\int_S ds A(r)\cos(kr-\omega t)$$

Przy opisie dyfrakcji Fresnela trzeba we wzorze A.# w zasadzie uwzględnić:
1. zależność amplitud fal składowych A od odległości pomiędzy otworkiem a punktem obserwacji, czyli od r;
2. różnice faz fal składowych, wynikającą z różnych odległości pomiędzy otworkiem a punktem obserwacji.

W konkretnych przypadkach może to prowadzić do poważnych komplikacji obliczeniowych.

Granica Fraunhofera

Jeżeli punkt obserwacji znajduje się bardzo daleko od otworu, można zrobić dwa założenia upraszczające (rys. A.#):

Rys. A.2. Do uproszczeń w granicy Fraunhofera

1. zaniedbać przy obliczaniu całki A.# różnice amplitud pomiędzy poszczególnymi otworkami, wynikające z zależności A od r. Zastępujemy zatem $A(r)$ stałą $A(r_0)$, odpowiadającą średniej odległości od punktu obserwacji. Stałą tę można wynieść przed całkę.

2. przyjąć, że linie łączące poszczególne otworki z punktem obserwacji P są w przybliżeniu równoległe.

Aby skorzystać z drugiego założenia, wprowadźmy na obszarze otworu pewien układ współrzędnych o początku w punkcie O. Wersor wektora łączącego punkt O z punktem P, czyli wektora $\vec{r}_0$, nazwijmy $\vec{n}$. Wersor $\vec{n}$ ma w naszym układzie współrzędnych składowe $[n_1, n_2, n_3]$.

Odległość od punktu O do punktu P oznaczmy r_0. Leżący w płaszczyźnie otworu wektor od punktu O do elementu ds nazwijmy $\vec{r}\,'$. W przybliżeniu 2 można napisać:

(A.3) $$r \approx r_0 - r'\cos\alpha = r_0 - \vec{r}\,'\vec{n}\,.$$

Na rysunku A.# iloczyn $\vec{r}\,'\vec{n}$ jest ujemny, a wtedy $r > r_0$.

Wynika stąd:

(A.4) $$\begin{aligned}\cos(kr - \omega t) &\approx \cos[(kr_0 - k\vec{r}\,'\vec{n}) - \omega t] = \cos(kr_0 - k\vec{r}\,'\vec{n} - \omega t) = \\ &= \cos[(kr_0 - \omega t) - k\vec{r}\,'\vec{n}] = \\ &= \cos(kr_0 - \omega t)\cdot\cos(k\vec{r}\,'\vec{n}) + \sin(kr_0 - \omega t)\cdot\sin(k\vec{r}\,'\vec{n})\,.\end{aligned}$$

Całka we wzorze A.# rozpadnie się więc na dwie:

(A.5) $$\begin{aligned}U(\vec{r}_{\mathrm{P}}, t) &= \int_S ds A(r)\cos(kr - \omega t) \approx A(r_0)\int_S ds\cos(kr - \omega t) \approx \\ &\approx A(r_0)\cos(kr_0 - \omega t)\int_S ds\cos(k\vec{r}\,'\vec{n}) + A(r_0)\sin(kr_0 - \omega t)\int_S ds\sin(k\vec{r}\,'\vec{n}).\end{aligned}$$

Natężenie światła

Wzór A.# opisuje drganie w punkcie obserwacji P. Natężenie światła I w punkcie P jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy tego drgania. Ta wielkość z kolei jest proporcjonalna do sumy kwadratów amplitud poszczególnych członów. Wynika to z tego, że składnik drugi we wzorze A.# opisuje drganie przesunięte w fazie o $\frac{\pi}{2}$ w stosunku do drgania, opisanego przez składnik pierwszy.

Aby to zauważyć, rozpatrzmy wyrażenie typu

(A.6) $$C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t).$$

Kwadrat takiego wyrażenia jest równy:

(A.7) $$C^2\cos^2(\omega t) + D^2\sin^2(\omega t) + 2CD\cos(\omega t)\sin(\omega t) = C^2\cos^2(\omega t) + D^2\sin^2(\omega t) + 2CD\sin(2\omega t).$$

Średnia po czasie ze składnika pierwszego w wyrażeniu A.# jest równa $\frac{1}{2}C^2$, średnia po czasie ze składnika drugiego jest równa $\frac{1}{2}D^2$, średnia po czasie z trzeciego jest równa zeru.

Natężenie światła w punkcie P, czyli I_P, jest więc proporcjonalne do wyrażenia

(A.8) $$I_P \propto \left(\int_S ds\cos(k\vec{r}\,'\vec{n})\right)^2 + \left(\int_S ds\sin(k\vec{r}\,'\vec{n})\right)^2.$$

Rozpatrzmy teraz natężenie światła na ekranie w punkcie Q, który jest umieszczony symetrycznie w stosunku do punktu P względem linii, przechodzącej przez punkt O i prostopadłej zarówno do powierzchni otworu, jak i powierzchni ekranu (rys. A.#). Punktowi Q odpowiada wersor $\vec{n}\,'$ o współrzędnych $[-n_1, -n_2, n_3]$. Wynika stąd, że

Rys. A.3. Symetryczne punkty obrazu dyfrakcyjnego

(A.9) $$k\vec{r}'\vec{n}' = -k\vec{r}'\vec{n}\ .$$

Jeżeli do wzoru A.# postawimy $\vec{n}'$ w miejsce $\vec{n}$, wtedy:

1. Cosinus jest funkcją parzystą, nie zmienia się pod wpływem zmiany znaku argumentu. A więc pierwszy kwadrat pozostaje niezmieniony.
2. Sinus jest funkcją nieparzystą, a więc funkcja podcałkowa zmieni znak. Zatem cała całka zmieni znak. Natomiast kwadrat tej całki pozostanie taki sam.

Natężenie światła w punkcie Q jest takie samo, jak natężenie w punkcie P.

Dlatego obraz dyfrakcji na otworze trójkątnym w granicy Fraunhofera ma symetrię sześciokrotną, czyli wyższą, niż dla dyfrakcji Fresnela.